

*August 30, 2020*

# **Condensé de la terminale Mathématiques**

Ewen Le Bihan  
TS3

## Notations non vues en cours

$:=$	Égal par définition
$\lceil x \rceil$	Arrondir $x$ à l'entier supérieur. ( $\lceil 5.1 \rceil = 6$ )
1.5	Séparateur ,
$x \cdot y$	Multiplication $\times$
$\nearrow$	Croissant
$\searrow$	Décroissant
$a \gtrless b$	Revient à écrire $a > b$ , $a = b$ et $a > b$
$\wedge$	"et"
$\vee$	"ou"
$\text{Im} z$	Point d'affixe $z$
$\diamond$	Caractère utilisé pour représenter plusieurs opérations
$\text{sgn}(x)$	$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
$\{A C\}$	L'ensemble de tout les $A$ tel que $C$

# Contents

<b>0 Outils</b>	<b>5</b>
0.1 Composition de fonction $f \circ g$	5
0.2 Équations de cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	5
0.3 Opérations avec des puissances	5
0.4 Diverses théorèmes	5
0.4.1 Application de fonctions aux inéquations	5
<b>1 Suites numériques</b>	<b>6</b>
1.1 Définition fonctionnelle	6
1.2 Définition par récurrence	6
1.3 Suite arithmétique	6
1.4 Suite géométrique	6
1.5 Limites	6
1.6 Majoration et minoration	7
1.7 Opérations sur les limites	7
1.8 Comparaisons et limites	7
<b>2 Probabilités</b>	<b>8</b>
2.1 Probabilité conditionnelle $P(A B)$	8
2.2 Probabilités d'intersections $P(A \cap B)$	8
2.3 Probabilités d'union $P(A \cup B)$	8
2.4 Partitions	8
2.5 Formule des probabilités totales	8
2.6 Indépendance d'événements	8
2.7 Autre vocabulaire	8
2.8 Probabilités à densité	9
2.9 Loi uniforme	9
2.10 Loi exponentielles	9
2.11 Espérance	9
2.12 Loi sans vieillissement	9
2.13 Lois normales	10
2.13.1 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$	10
2.13.2 Probabilité d'intervalle centrée en 0	10
2.13.3 Théorème de Moivre-Laplace	10
2.13.4 Lois normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	10
<b>3 Limites <math>\lim</math></b>	<b>11</b>
3.1 Notation	11
3.2 Limites d'un quotient à la valeur indéfinie	11
3.3 Opérations sur les limites	11
3.4 Asymptotes	12
3.5 Simplifications de limites	12

3.5.1	Polynômes . . . . .	12
3.6	Fonctions composées . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Continuité des fonctions</b>	<b>13</b>
4.1	Définition . . . . .	13
4.2	Continuité de fonctions usuelles . . . . .	13
4.3	Théorèmes utilisant la continuité . . . . .	13
4.3.1	Valeurs intermédiaires . . . . .	13
4.3.2	Bijection . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Nombres complexes <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>14</b>
5.1	Définition . . . . .	14
5.2	Partie imaginaire $\text{Im}$ et réelle $\text{Re}$ . . . . .	14
5.2.1	Définition . . . . .	14
5.2.2	Propriétés . . . . .	14
5.3	Conjugué $\bar{z}$ . . . . .	14
5.3.1	Définition . . . . .	14
5.3.2	Identités . . . . .	14
5.4	Affixe $\text{Aff}$ . . . . .	14
5.4.1	Propriétés . . . . .	14
5.5	Racines des polynômes de second degré $az^2 + bz + c$ . . . . .	15
5.6	Coordonnées polaires avec $z$ . . . . .	15
5.6.1	Module $ z $ . . . . .	15
5.6.2	Argument $\arg$ . . . . .	15
5.7	Formes . . . . .	16
5.7.1	Propriétés de la forme exponentielle . . . . .	16
5.8	Inégalité triangulaire . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Dérivées</b>	<b>17</b>
6.1	Opération sur des fonctions . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Fonction exponentielle <math>\exp</math></b>	<b>18</b>
7.1	Notation . . . . .	18
7.2	Caractéristiques . . . . .	18
7.3	Limites remarquables . . . . .	18
7.4	Propriétés . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Géométrie dans l'espace</b>	<b>19</b>
8.1	Intersections . . . . .	19
8.1.1	Droite-droite, plan-plan . . . . .	19
8.1.2	Droite-plan . . . . .	19
8.2	Section d'un cube . . . . .	19
8.3	Orthogonalité $\perp$ . . . . .	19
8.4	Plan $\perp$ droite . . . . .	19

8.5	Plan médiateur . . . . .	19
8.6	Propriétés . . . . .	20
8.7	Coordonnées . . . . .	20
8.8	Vecteurs dans l'espace . . . . .	20
8.8.1	Propriétés identiques aux vecteurs bidimensionnels . . . . .	20
8.8.2	Propriétés . . . . .	20
8.8.3	Caractérisation vectorielle d'objets . . . . .	20
8.9	Équations paramétriques . . . . .	21
8.9.1	D'une droite . . . . .	21
8.9.2	D'un plan . . . . .	21
8.10	Produit scalaire . . . . .	21
8.10.1	Propriétés . . . . .	21
8.11	Équations cartésienne d'un plan . . . . .	21
<b>9</b>	<b>Le logarithme népérien <math>\ln</math></b>	<b>22</b>
9.1	Caractéristiques . . . . .	22
9.2	Limites remarquables . . . . .	22
9.3	Propriétés . . . . .	22
<b>10</b>	<b>Primitives <math>F</math></b>	<b>23</b>
10.1	Définition . . . . .	23
10.2	Propriétés . . . . .	23
10.3	Primitives remarquables . . . . .	23
10.4	Opérations avec primitives . . . . .	23
<b>11</b>	<b>Intégrales <math>\int</math></b>	<b>24</b>
11.1	Notation . . . . .	24
11.2	Unité d'aires $ua$ . . . . .	24
11.2.1	Définition . . . . .	24
11.3	Calcul . . . . .	24
11.4	Propriétés . . . . .	24
11.5	Valeur moyenne de $f$ sur $[a; b]$ . . . . .	24
11.6	Intégration par parties . . . . .	24
<b>12</b>	<b>Échantillonnage</b>	<b>25</b>
12.1	Fréquence de caractère $X_n$ . . . . .	25
12.2	Fréquence de caractère dans échantillon $F_n$ . . . . .	25
12.3	Intervalle de fluctuation $I_n$ . . . . .	25
12.3.1	Interprétation . . . . .	25
12.4	Trouver $p$ avec $f$ et $n$ . . . . .	25
<b>13</b>	<b>Trigonométrie</b>	<b>26</b>
13.1	Valeurs remarquables . . . . .	26
13.2	Primitives et dérivées de $\pm \cos x$ et $\pm \sin x$ . . . . .	26

## 0 Outils

### 0.1 Composition de fonction $f \circ g$

Soit  $f$  et  $g$  des fonctions respectivement définies sur  $I$  et  $J$

$$(f \circ g)(x) \iff f(g(x))$$

Attention: il faut que  $x$  soit défini dans  $I$  et que  $g(x)$  soit défini dans  $J$

Plus généralement, soit  $\Theta$  un ensemble de fonctions

$$\left(\bigcirc_{i=0}^j \Theta_i\right)(x) = \Theta_0(\Theta_1(\Theta_2(\Theta_3 \dots (x \dots)))$$

### 0.2 Équations de cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Soit  $R$  le rayon du cercle, et  $O(x_0; y_0)$  le centre du cercle

Un cercle dans le plan peut être décrit par l'équation suivante:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

### 0.3 Opérations avec des puissances

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$$

$$x^0 = 1$$

### 0.4 Diverses théorèmes

#### 0.4.1 Application de fonctions aux inéquations

Soit  $I$  une intervalle,  $f$  une fonction définie et croissante sur  $I$ ,  $x$  et  $y$  deux nombres dans  $I$

$$\begin{aligned} x &\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} y \\ \iff f(x) &\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} f(y) \end{aligned}$$

# 1 Suites numériques

## 1.1 Définition fonctionnelle

Soit  $f$  une fonction:

$$u_n = f(n)$$

## 1.2 Définition par récurrence

Soit  $f$  une fonction

$$u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

## 1.3 Suite arithmétique

Avec  $r$  la raison de la suite

**Définition fonctionnelle**  $u_n = u_0 + r \cdot n$

**Définition par récurrence**  $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

**Somme des termes de  $i$  à  $j$**   $f \sum_{i=i}^j u_i = (j - i + 1) \cdot \frac{u_j + u_i}{2}$

## 1.4 Suite géométrique

Avec  $q$  la raison de la suite

**Définition fonctionnelle**  $u_n = u_0 \cdot q^n$

**Définition par récurrence**  $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n \cdot q \end{cases}$

**Somme des termes de  $i$  à  $j$**   $f \sum_{i=i}^j u_i = u_j \cdot \frac{1 - q^{j-i+1}}{1 - q}$

## 1.5 Limites

**Suite convergente vers  $L$**   $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

**Suite divergente**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq L$

$p \in \{0.5\} \cup \mathbb{N}$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$q \in \mathbb{R}$					
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	?		$0$	$1$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p$		$0$		$1$	$+\infty$

Limites de type  $\text{cste}^n$  ou  $n^{\text{cste}}$

## 1.6 Majoration et minoration

Soit  $(u_n)$  une suite définie sur les rangs dans  $I$  et  $L$  un réel

**Suite majorée**  $\forall n \in I \exists M \quad u_n \leq M$

**Suite minorée**  $\forall n \in I \exists m \quad u_n \geq m$

**Suite bornée** Suite majorée *et* minorée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \dots$$

	Majorée (par $L$ )		Minorée (par $L$ )	
	Oui	Non	Oui	Non
$\nearrow$	$\leq L$	$= +\infty$		
$\searrow$			$\geq L$	$= -\infty$

Soit  $f$  la fonction associée à  $u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f(L)$$

## 1.7 Opérations sur les limites

Voir en 3.3

## 1.8 Comparaisons et limites

Soit  $L \in \mathbb{R}$ ,  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites et  $l_A$  la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  de la suite  $A_n$

Nom du théorème	Conditions		Résultat	Explication graphique
Par comparaison	$u_n \leq v_n$	$l_u = +\infty$	$\implies l_v = +\infty$	$(u_n)$ emporte $(v_n)$ vers $+\infty$
	$u_n \geq v_n$	$l_u = -\infty$	$\implies l_v = -\infty$	$(u_n)$ emporte $(v_n)$ vers $-\infty$
Théorème des gendarmes	$w_n \geq v_n \geq u_n$	$l_u = l_w = L$	$\implies l_v = L$	$(u_n)$ et $(w_n)$ forcent $(v_n)$ à tendre vers $L$

## 2 Probabilités

### 2.1 Probabilité conditionnelle $P(A|B)$

Probabilité que  $A$  soit réalisé sachant que  $B$  a déjà été réalisé.

$$P(A|B) \text{ ou } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ si } P(B) \neq 0$$

### 2.2 Probabilités d'intersections $P(A \cap B)$

Probabilité que  $A$  et  $B$  soit réalisées.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \end{aligned}$$

### 2.3 Probabilités d'union $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

### 2.4 Partitions

Si on a deux événements ou plus tel que...

- Aucun événement n'est vide  
 $\iff B_i \neq \emptyset \quad \forall i$
- Aucun événement ne recouvre un autre  
 $\iff B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j$
- L'union de chaque partition couvre l'univers entier  
 $\iff \bigcup_{i=1}^j B_i = \Omega$

### 2.5 Formule des probabilités totales

Soit  $B_1, B_2, \dots, B_n$  des événements formant une partition de  $\Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$

### 2.6 Indépendance d'événements

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\iff \bar{B} \text{ et } B \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \bar{A} \text{ et } A \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \bar{A} \text{ et } \bar{B}, A \text{ et } \bar{B} \text{ et } B \text{ et } \bar{A} \text{ sont indépendants} \end{aligned}$$

### 2.7 Autre vocabulaire

**Événements incompatibles**  $P(A \cap B) = 0$

**Variable aléatoire continue** La variable aléatoire peut prendre n'importe quel valeur dans  $I := I \subset \mathbb{R}$

*À partir d'ici, la connaissance des intégrales est requise (voir 11)*

## 2.8 Probabilités à densité

$f$  est une densité de probabilité si:

- $D_f \subset \mathbb{R}_+$
- $f$  est continue
- $\int_{D_f} f(x)dx = 1$

La loi de  $X$  admet  $f$  comme densité de probabilité  $\iff P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(t)dt$   
 $\wedge [a, b] \subseteq D_f \subset \mathbb{R}_+$   
 $\implies \forall n \in D_f \quad P(X = n) = 0$   
 $\implies$  Dans les conditions  $P(\dots)$ ,  $\geq \iff >$  et  $\leq \iff <$   
 $\implies P(X > k) = 1 - P(X < k)$   
 $\implies P(X \in [a, b]) = P(X < b) - P(X < a)$   
 $\implies P(X \in [a, b] \mid X \in [c, d]) = \frac{P(X \in [a, b] \cap [c, d])}{P(X \in [c, d])}$   
 $\implies E(X) = \int_{D_f} tf(t)dt$

## 2.9 Loi uniforme

$X$  suit la loi uniforme sur  $[a, b]$   $\iff$  La loi de  $X$  admet  $x \mapsto \frac{1}{b-a}$  comme densité de probabilité

$$[c, d] \subseteq [a, b] \iff P(X \in [c, d]) = \frac{d-c}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

## 2.10 Loi exponentielles

$X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$   $\iff$  La loi de  $X$  admet  $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$  comme densité de probabilité

## 2.11 Espérance

Si la loi de  $X$  admet  $f$  comme densité de probabilité et que, pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $f = x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n tf(t)dt$$

## 2.12 Loi sans vieillissement

$$P(X \geq t+h \mid X \geq t) = P(X \geq h)$$

## 2.13 Lois normales

### 2.13.1 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$$X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0,1) \iff P(X \in [a,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2} dx$$

#### Propriétés

$$\begin{aligned} E(X) = 0 & \iff \text{centrée} \\ \sigma = 1 & \iff \text{réduite} \\ \iff V = 1 & \end{aligned}$$

### 2.13.2 Probabilité d'intervalle centrée en 0

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \iff \forall \alpha \in ]0,1[ \quad \exists_{=1} u_\alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad P(X \in [-u_\alpha, u_\alpha]) = 1 - u_\alpha$$

#### Deux valeurs remarquables

$$u_{0.05} = 1.96$$

$$u_{0.01} = 2.58$$

### 2.13.3 Théorème de Moivre-Laplace

$$\begin{aligned} X_n & \sim \mathcal{B}(n,p) \\ \wedge \quad p & \in [0,1] \\ \wedge \quad Z_n & = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n & = \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

### 2.13.4 Lois normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma \in \mathbb{R}_+, \quad Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} Y \sim \mathcal{N}(0,1) & \implies X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ & \implies E(X) = \mu \\ & \implies V = \sigma^2 \\ & \implies \sigma \text{ (écart type)} = \sigma \end{aligned}$$

### 3 Limites lim

#### 3.1 Notation

Soit  $x$ ,  $C$  et  $D$  des nombres et  $\Psi$  un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \Psi} C = D \iff C \xrightarrow{x \rightarrow \Psi} D$$

$\iff$  Limite de  $C$  quand  $x$  tends vers  $\Psi$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \Psi \\ >}} C = D \iff C \xrightarrow{x \rightarrow \Psi^+} D$$

$\iff$  Limite de  $C$  en  $\Psi$  par valeurs supérieures  
 $\iff$  Limite de  $C$  à droite de  $\Psi$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \Psi \\ <}} C = D \iff C \xrightarrow{x \rightarrow \Psi^-} D$$

$\iff$  Limite de  $C$  en  $\Psi$  par valeurs inférieures  
 $\iff$  Limite de  $C$  à gauche de  $\Psi$

#### 3.2 Limites d'un quotient à la valeur indéfinie

Soit  $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$  et  $r \in \mathbb{R}$  tq.  $q(r) = 0$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow r} p(x)$
2. **Par valeurs supérieures** Calculer  $\lim_{x \rightarrow r^+} q(x)$ :  $0^+$  ou  $0^-$   
**Par valeurs inférieures** Calculer  $\lim_{x \rightarrow r^-} q(x)$ :  $0^+$  ou  $0^-$
3. Conclure par quotient:  $0^+ \rightarrow +$  et  $0^- \rightarrow -$

#### 3.3 Opérations sur les limites

Les opérations entre deux limites réelles sont comparables aux opérations sur des nombres

**FI** Forme Indéterminée

$x, y$	$x + y$	$x \cdot y$	$x/y$
$\pm\infty$	Signes = $\pm\infty$ Signes $\neq$ <b>FI</b>	(règle des signes)	<b>FI</b>
$\mathbb{R}$ ou $\pm\infty$	$\pm\infty$	$x = 0$ <b>FI</b> $x > 0$ $\pm\infty$ $x < 0$ $\mp\infty$	$y = 0$ <b>FI</b> $y = \pm\infty$ $0$ $x = \pm\infty$ et $y \in \mathbb{R}^*$ $\pm\infty$

### 3.4 Asymptotes

Soit  $L \in \mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction,  $\Gamma$  la courbe d'équation  $y = f(x)$  et  $\Psi$  un nombre ou symbole

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow \Psi}{\longrightarrow} L &\iff \Gamma \text{ admet en } \Psi \text{ une asymptote (horizontale) d'équation } y = L \\ \left\{ \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow L^+}{\longrightarrow} \pm\infty \\ f(x) \underset{x \rightarrow L^-}{\longrightarrow} \pm\infty \end{array} \right. &\iff \Gamma \text{ admet en } L \text{ une asymptote (verticale) d'équation } x = L \end{aligned}$$

### 3.5 Simplifications de limites

#### 3.5.1 Polynômes

Pour les limites en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ , on peut simplifier la limite d'un polynôme à la limite du terme de plus haut degré:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 4x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3$$

Ça marche aussi avec les fractions:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^9 + x^3 - 2}{5x^3 - 8x^{18} + 420} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^9}{-8x^{18}}$$

### 3.6 Fonctions composées

Soit  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ ,  $f$  et  $g$  des fonctions

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} b \\ g(x) \underset{x \rightarrow b}{\longrightarrow} c \end{array} \right. \implies (f \circ g)(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} c$$

## 4 Continuité des fonctions

### 4.1 Définition

Une fonction est continue quand "on peut tracer sa courbe sans lever le stylo". Plus rigoureusement, la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  si, pour tout  $a \in I$ ,  $f(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ .

### 4.2 Continuité de fonctions usuelles

Polynôme	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$
Rationnelle	Ensemble de définition

De plus, n'importe quelle fonction créée par  $+$ ,  $\times$ ,  $\circ$  ou  $\div$  à partir de fonctions continues sont continues

### 4.3 Théorèmes utilisant la continuité

#### 4.3.1 Valeurs intermédiaires

Soit  $a$  et  $b$  des réels,  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

$$\forall k \in [f(a); f(b)], \quad f(x) = k \text{ admet au moins une solution dans } [a; b]$$

#### 4.3.2 Bijection

Soit  $I$  une intervalle,  $a$  et  $b$  des réels dans  $I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$  ou plus grand

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est strictement monotone sur } I \end{cases} \quad (1)$$
$$k \in [f(a); f(b)] \quad (2)$$

$$\implies f(x) = k \text{ admet une unique solution dans } [a; b]$$

(1) quand elle ne l'est pas, on étudie séparément chaque intervalle où la fonction est strictement monotone

(2) si  $a$  ou  $b = \pm\infty$ , on calcule la limite pour l'intervalle image:

Montrer que  $f(x) = k$  n'admet qu'une seule solution dans  $\mathbb{R}$

$$k \in \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

*Attention:* pour montrer que  $f(x) = k$  n'a pas de solutions on n'utilise pas la bijection mais le tableau de variations

## 5 Nombres complexes $\mathbb{C}$

### 5.1 Définition

$$i^2 := -1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$z := a + ib$$

Ensemble des imaginaires purs:  $i\mathbb{R} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

### 5.2 Partie imaginaire $\text{Im}$ et réelle $\text{Re}$

#### 5.2.1 Définition

- $\text{Re}(a + ib) := a$
- $\text{Im}(a + ib) := b$

#### 5.2.2 Propriétés

- $\text{Re } z = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$
- $\text{Im } z = 0 \iff z \in \mathbb{R}$

### 5.3 Conjugé $\bar{z}$

#### 5.3.1 Définition

$$\bar{z} := \text{Re } z - i\text{Im } z$$

#### 5.3.2 Identités

◊ représente les opérations  $+$ ,  $\times$  et  $\div$

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = (\text{Im } z)^2 + (\text{Re } z)^2$
- $\overline{z \diamond w} = \bar{z} \diamond \bar{w}$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

### 5.4 Affixe $\text{Aff}$

L'affixe est un nombre complexe représenté par un point ou un vecteur dans le plan:

$$\text{Aff} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + ib$$

Réciproquement, l'image de  $a + ib$  est  $(a; b)$

#### 5.4.1 Propriétés

- $\text{Aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{Aff}(B) - \text{Aff}(A)$

## 5.5 Racines des polynômes de second degré $az^2 + bz + c$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \Delta := b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 & \Rightarrow \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 & \Rightarrow \frac{-b}{2a} \\ \Delta > 0 & \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

## 5.6 Coordonnées polaires avec $z$

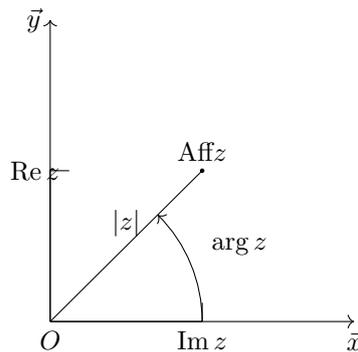


Figure 1: Représentation géométrique de l'affixe de  $z$  et de ses propriétés

### 5.6.1 Module $|z|$

$$|z| := \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$$

#### Propriétés

◇ représente les opérations  $\times$  et  $\div$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$|z \diamond z'| = |z| \diamond |z'|$$

### 5.6.2 Argument $\arg$

$$\forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\begin{aligned} \arg z &:= \left( \vec{x}; \overrightarrow{O\operatorname{Im} z} \right) \\ &= \begin{cases} \cos(\arg z) &= \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \sin(\arg z) &= \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{cases} \end{aligned}$$

#### Propriétés

On note  $z_\diamond$  l'affixe du point ou vecteur ◇

- $(\vec{w}, \vec{w}') = \arg \frac{z_{w'}}{z_w}$

- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \frac{D-C}{B-A}$

*Propriétés de produit, puissance, quotient et inverse identiques à ln, voir 9.2*

## 5.7 Formes

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z & \quad (\text{algébrique}) \\ |z| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) & \quad (\text{trigonométrique}) \\ |z| e^{i \arg z} & \quad (\text{exponentielle}) \end{aligned}$$

Notations usuelles:  $r := |z|$ ,  $\theta := \arg z$ ,  $x := \operatorname{Re} z$ ,  $y := \operatorname{Im} z$

### 5.7.1 Propriétés de la forme exponentielle

$$e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

*Les autres propriétés découlent de celles de l'exponentielle, voir 7.3*

## 5.8 Inégalité triangulaire

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

## 6 Dérivées

### 6.1 Opération sur des fonctions

Soit  $u$  et  $v$  des fonctions.

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v + v'u \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ (u^n)' &= nu'u^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0.5, -1\} \\ (u \circ v)' &= u'(v' \circ u) \\ \sin' &= \cos \\ \cos' &= -\sin\end{aligned}$$

## 7 Fonction exponentielle exp

### 7.1 Notation

$$e^x := \exp x$$

### 7.2 Caractéristiques

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $u$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$

**Dérivée**  $(e^x)' = e^x$   
 $(e^u)' = u'e^u$

**Réciproque**  $\ln(e^x) = x$

**Signe**  $e^x > 0$

**Variations** strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

**Limites**  $e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$   
 $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

### 7.3 Limites remarquables

lim	$x \rightarrow$	=
$e^x - 1/x$	0	1
Par croissance comparée ↓		
$xe^x$	$-\infty$	0
$e^x/x$	$+\infty$	$+\infty$

### 7.4 Propriétés

$$e^a \gtrless e^b \iff a \gtrless b$$

$e^{a \diamond b}$	$e^a \diamond e^b$
+	×
-	÷
$(e^a)^n$	$e^{an}$

## 8 Géométrie dans l'espace

### 8.1 Intersections

#### 8.1.1 Droite-droite, plan-plan

Soit  $a$  et  $b$  des droites et  $P$  et  $Q$  des plans

	Coplanaires			Non-coplanaires
	Parallèles		Sécantes	
	Strictement	Confondues		
$a \cap b$	$\emptyset$	$a$ et $b$	{point}	$\emptyset$
$P \cap Q$	$\emptyset$	$P$ et $Q$	droite	$\emptyset$

#### 8.1.2 Droite-plan

	Parallèles		Sécants
	Strictement	$a \subset P$	
$a \cap P$	$\emptyset$	droite	{point}

## 8.2 Section d'un cube

2 points dans la même face

Relier directement

$[AB]$  sur une face,  $C$  sur face opposée

Tracer la parallèle à  $[AB]$  passant par  $C$

$[AB]$  sur une face  $E$ ,  $C$  sur face adjacente

Prolonger une arête et  $(AB)$  jusqu'à intersection en  $D$

Tracer  $(DC)$ . La partie du segment qui est sur la face  $E$  est la section.

## 8.3 Orthogonalité $\perp$

$$d \underset{\text{orth.}}{\perp} d' \iff \underset{\text{perp.}}{\gamma \perp \gamma'} \quad \exists \gamma \parallel d, \gamma' \parallel d'$$

## 8.4 Plan $\perp$ droite

$$\begin{aligned} d \perp P &\iff d \perp \gamma \wedge d \perp \gamma' \quad \forall \gamma \cap \gamma' = \text{point} \\ &\implies \gamma \perp d \quad \forall \gamma \subset P \end{aligned}$$

## 8.5 Plan médiateur

$$\begin{aligned} P \text{ med } [AB] &\iff P \perp (AB) \wedge I \in P \quad \forall I \text{ mil } [AB] \\ &\iff P = \{C \mid CA = CB\} \end{aligned}$$

## 8.6 Propriétés

Soit  $P, \Gamma, Q, P'$  des plans. Soit  $d, d', d_1$ , droite,  $d'_1, \gamma, \Delta$  des droites. Soit point un point.

$$\begin{aligned} d \parallel d' &\implies P \perp d \quad \forall P \perp d' \\ &\iff d \parallel \gamma \wedge d' \parallel \gamma \\ &\iff P \cap P' = d' \wedge d \parallel P \wedge d \parallel P' \quad (\text{doute}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \parallel P' &\iff P \perp d \wedge P' \perp d \\ &\iff P \parallel \Delta \wedge P' \parallel \Delta \\ &\iff d_1 \parallel d'_1 \wedge d \parallel d' \quad \forall d \cap d' = \text{point}, d_1 \cap d'_1 = \text{point} \quad (\text{il faut que } P \text{ soit présent}) \\ &\implies \Gamma \cap P' = \gamma \wedge \Gamma \cap P = \gamma' \wedge \gamma \parallel \gamma' \quad \forall \Gamma \cap P = \text{droite} \end{aligned}$$

$$\Delta \parallel d \wedge \Delta \parallel d' \iff d \parallel d' \wedge d \subset P \wedge d' \subset P' \wedge P \cap P' = \Delta$$

$$\Delta \parallel P \iff \Delta \parallel d \quad \forall d \subset P$$

$$P \parallel Q \wedge \Gamma \cap P = \gamma \implies \Gamma \cap Q = \gamma' \wedge \gamma \parallel \gamma'$$

## 8.7 Coordonnées

Un triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Les propriétés de la géométrie plane (milieu, colinéarité et vecteurs) se traduisent trivialement

## 8.8 Vecteurs dans l'espace

### 8.8.1 Propriétés identiques aux vecteurs bidimensionnels

- Relation de Chasles
- Colinéarité

### 8.8.2 Propriétés

- $A, B, C$  non-alignés.  $\forall D \quad \overrightarrow{AD}$  coplanaire  $\overrightarrow{AB}$  coplanaire  $\overrightarrow{AC} \iff D \in (ABC)$
- $\exists x, y \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \implies D \in (ABC)$
- $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  coplanaires  $\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}^* : a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$
- $\vec{u}, \vec{v} \in P$  non colinéaires,  $\vec{n} \neq \vec{0}$ .  $\vec{n}$  normal à  $P \iff \vec{n} \perp \vec{v} \wedge \vec{n} \perp \vec{u}$

### 8.8.3 Caractérisation vectorielle d'objets

**Droite**  $A$  point,  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $d$  la droite passant par  $A$  de vecteur directeur  $\vec{u}$

$$M = \{B \mid \overrightarrow{AB} = x\vec{u}\} \implies M \text{ est la droite } d$$

**Plan**  $A$  point,  $\vec{u}$  colinéaire  $\vec{v}$ ,  $M$  ensemble de points,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\overrightarrow{AB} := x\vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} := y\vec{v}$

$$M = \{B \mid \overrightarrow{AB} = x\vec{u} + y\vec{v}\} \implies M \text{ est un plan } (ABC)$$

*C'est l'ensemble de tout les points dans le repère  $(A, \vec{u}, \vec{v})$*

## 8.9 Équations paramétriques

### 8.9.1 D'une droite

Soit...

$$\begin{aligned}A &:= (x_A; y_A; z_A) \\ \vec{u} &:= (x_u; y_u; z_u) \\ M &:= (x; y; z) \\ D &:= \text{droite passant par } A \text{ de vecteur directeur } \vec{u}\end{aligned}$$

On a:

$$M \in D \iff \begin{cases} x = x_u t + x_A \\ y = y_u t + y_A \\ z = z_u t + z_A \end{cases}$$

### 8.9.2 D'un plan

Soit...

$$\begin{aligned}A &:= (x_A; y_A; z_A) \\ \vec{u} &:= (x_u; y_u; z_u) \\ \vec{w} &:= (x_w; y_w; z_w) \\ M &:= (x; y; z) \\ P &:= \text{plan passant par } A \text{ de vecteurs directeurs } \vec{u} \text{ et } \vec{w}\end{aligned}$$

On a:

$$M \in P \iff \begin{cases} x = x_u t + x_w t' + x_A \\ y = y_u t + y_w t' + y_A \\ z = z_u t + z_w t' + z_A \end{cases}$$

## 8.10 Produit scalaire

### 8.10.1 Propriétés

- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{v} \perp \vec{u} \iff \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

## 8.11 Équations cartésienne d'un plan

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $P$  un plan,  $\vec{n} := (a, b, c)$  le vecteur normal à  $P$  et  $A := (x, y, z)$

$$A \in P \iff ax + by + cz + d = 0$$

## 9 Le logarithme népérien $\ln$

Aussi appelé "logarithme naturel" ou "logarithme base  $e$ "

### 9.1 Caractéristiques

<b>Notation</b>	$\ln x$
<b>Réciproque</b>	$\exp$
<b>Ensemble</b>	$\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
<b>Limites</b>	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
<b>Dérivée d'une variable</b>	$\frac{1}{x}$
<b>Dérivée d'une fonction</b>	$\frac{u'}{u}$
<b>Variations</b>	Croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
<b>Continuité</b>	Continue sur $\mathbb{R}_+^*$
<b>Valeurs remarquables</b>	$\ln 1 = 0$

### 9.2 Limites remarquables

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

### 9.3 Propriétés

$\ln(a \diamond b)$	$\ln a \diamond \ln b$
$\times$	$+$
$\div$	$-$
$a^n$	$n \ln a$

## 10 Primitives $F$

### 10.1 Définition

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = f(x)$$

### 10.2 Propriétés

- $\forall C \in \mathbb{R} \quad x \mapsto F(x) + C$  est une primitive de  $f$
- $F + G$  primitive de  $f + g$
- $\forall k \in \mathbb{R} \quad kF$  primitive de  $kf$

### 10.3 Primitives remarquables

$f$	$F$	$\in I$ ( $\mathbb{R}$ par défaut)
$k$	$kx$	
$x$	$\frac{1}{2}x^2$	
$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \quad x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (0 est aussi non-défini quand $n < 0$ )
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$

### 10.4 Opérations avec primitives

$f$	$F$	Conditions sur $f$ et $I$
$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \quad f' f^n$	$\frac{1}{n+1} f^{n+1}$	
$f'/f$	$\ln f$	$\forall x \in I \quad f(x) \in \mathbb{R}_+^*$
$f'/\sqrt{f}$	$2\sqrt{f}$	
$f'e^f$	$e^f$	
$f' \cos f$	$\sin f$	
$f' \sin f$	$-\cos f$	

## 11 Intégrales $\int$

### 11.1 Notation

Soit  $A_f \in \mathbb{R}$  l'aire sous la courbe de  $f$  de  $x = a$  à  $x = b$  par rapport à l'axe des abscisses

$$\int_a^b f(x)dx = A_f$$

$$\int_{\text{borne inf.}}^{\text{borne sup.}} \text{expression } d\text{var. d'intégration}$$

### 11.2 Unité d'aires $ua$

$\forall x \in [a; b] f(x) \geq 0 \wedge b \geq a \iff A_f$  est exprimée en  $ua$ .

#### 11.2.1 Définition

$$1ua = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\|$$

### 11.3 Calcul

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

### 11.4 Propriétés

Pour alléger les notations:  $\Downarrow = f(x)dx$ ,  $\Updownarrow = g(x)dx$  et  $\int = \int_a^b$

- $\int_a^a \Downarrow = 0$
- $\int_a^b \Downarrow = - \int_b^a \Downarrow$
- $\int_a^c \Downarrow = \int_a^b \Downarrow + \int_b^c \Downarrow$  (Relation de Chasles)
- $\int k \Downarrow = k \int \Downarrow$
- $\int (f(x) + g(x))dx = \int \Downarrow + \int \Updownarrow$
- $\int \Downarrow \geq 0 \implies f(x) \geq 0$
- $f(x) \geq g(x) \implies \int \Downarrow \geq \int \Updownarrow$

### 11.5 Valeur moyenne de $f$ sur $[a; b]$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

### 11.6 Intégration par parties

$$\int_a^b v(x)u'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)u(x)dx$$

## 12 Échantillonnage

### 12.1 Fréquence de caractère $X_n$

Soit le caractère  $\mathcal{C}$  dont la proportion de présence dans une population est  $p$ .  $X_n$  associe à la taille d'échantillon  $n$  le nombre de caractères présents dans l'échantillon.

$$X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$$

### 12.2 Fréquence de caractère dans échantillon $F_n$

$$F_n = \frac{X_n}{n}$$

### 12.3 Intervalle de fluctuation $I_n$

Soit

$Z$  la loi normale centrée réduite,

$\alpha \in ]0, 1[$ ,

$u_\alpha \in \mathbb{R}$  tq.  $P(Z \in [-u_\alpha, u_\alpha]) = 1 - \alpha$ ,

$q := 1 - p$

$$I_n = \left[ p - u_\alpha \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \right]$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$$

#### 12.3.1 Interprétation

Pour un  $n$  assez grand,  $F_n \in I_n$  avec une probabilité d'approximativement  $1 - \alpha$ . On admet que

$$P(F_n \in I_n) \approx 1 - \alpha$$

Quand:

- $n \geq 30$
- $np \geq 5$
- $nq \geq 5$

Si au moins une des conditions n'est *pas* remplie, il faudra utiliser une intervalle de fluctuation

### 12.4 Trouver $p$ avec $f$ et $n$

$$\exists n_0 : n \geq n_0 \implies P\left(p \in \left[ F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]\right) \geq 0.95$$

## 13 Trigonométrie

### 13.1 Valeurs remarquables

Table 1: Valeurs remarquables de sin, cos, tan et cotan

$x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cotan x$
0	0	1	0	
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0		0

### 13.2 Primitives et dérivées de $\pm \cos x$ et $\pm \sin x$

